REPASO DE CUESTIONES BÁSICAS (E.S.O.)

Si has olvidado, tendrás que recordar; si no sabes, tendrás que aprender.

Para comenzar este curso debes manejar con relativa soltura la mayoría de los conceptos estudiados en la ESO. Aquí recordaré cuestiones relacionadas con las operaciones con números, insistiendo en los errores de cálculo más frecuentes.

- **Operaciones con números enteros**

Cuando se opera con números enteros (suma, resta, multiplicación, potenciación), las reglas a seguir son, básicamente, las relacionadas con los signos, la prioridad de las operaciones y el uso de paréntesis.

Ejemplos:

a) La operación 15 – 3 · (7 – 9) = 15 – 3 · (–2) = 15 + 6 = 21.

Observa que primero se opera dentro del paréntesis, a continuación, se hace el producto y, por último, se realiza la suma.

→ Ensaya 1: a) $5\cdot(-3+7)-2\cdot(-9-4)$;b) $5\cdot(4-6)-2\cdot(7-5)$. (sol. a) 46. b) –14).

b) Para realizar la operación $3^2-3\cdot\left(1+(-2)^3\right)^2$, hay que seguir con cuidado el orden de las operaciones. Se haría así:

$$3^2-3\cdot\left(1+(-2)^3\right)^2 = 9-3\cdot(1+(-8))^2=9-3\cdot(1-8)^2=9-3\cdot(-7)^2=9-3\cdot49 = 9-147=-138.$$

→ Ensaya 2: a) $-4^2+2\cdot\left(5-(-1)^5\right)^2$; b) $-(-3)^3-(-4)^2-2\cdot(-5)^2$. (sol. a) 56. b) –39).

Un posible error es escribir: $-4^2=16$. Si es cierto que $(-4)^2=16$.

Observa: $(-4)^2=(-4)\cdot(-4)=+4\cdot4=16$. En cambio: $-4^2=-(4\cdot4)=-16$.

Si tienes dificultades con esto, pincha aquí.

- **Operaciones con fracciones**

Cuando se opera con fracciones, además de lo anterior hay que saber el mecanismo de las operaciones. (Si tienes problemas con esto, pincha aquí).

Ejemplos:

a) Para realizar la operación $\frac{5}{18}-\frac{2}{27}+3$, además de saber el significado de cada uno de los sumandos, hay que reducir a común denominador, procediendo como sigue:

$$\frac{5}{18}-\frac{2}{27}+3 = \frac{5}{18}-\frac{2}{27}+\frac{3}{1}=\frac{15}{54}-\frac{4}{54}+\frac{162}{54}=\frac{15-4+162}{54}=\frac{173}{54}. \rightarrow \text{Recuerda: } \frac{a}{b}+c=\frac{a+bc}{b}.$$

→ Ensaya 3: a) $2-\left(\frac{5}{7}-\frac{31}{21}\right)$; b) $\frac{3}{5}-\left(\frac{5}{7}-3\right)$. (sol. a) $\frac{58}{21}$. b) 101/35).

❖ Las calculadoras permiten hacer estas operaciones (basta con teclear correctamente, indicando el paréntesis). Practica con los ejemplos vistos.

b) Para hallar $\frac{4}{3}:\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}-2\right)$, conviene seguir este orden: división, paréntesis, multiplicación y suma. Así:

$$\frac{4}{3}:\frac{2}{5}-\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{4}{5}-2\right) = \frac{20}{6}-\frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)=\frac{20}{6}+\frac{6}{30}=\frac{100+6}{30}=\frac{106}{30}=\frac{53}{15}.$$

→ Ensaya 4: a) $\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{3}+\frac{1}{6}:\left(\frac{3}{5}-1\right)$; b) $\left(\frac{7}{5}-\frac{4}{5}\right):\frac{7}{3}-\frac{4}{5}:2$ (sol. a) $-\frac{53}{60}$; b) 1).

❖ Repítelo con la calculadora.

- **Operaciones con potencias**

Definición de potencia: $A^n = A\cdot A\cdot \ldots \cdot A$, el factor A, que puede ser un número o cualquier objeto matemático, se repite n veces.
Entender esta definición implica, entre otras cosas, saber que:

a) $2^5 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 32$. b) $(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = 81$.

c) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 3} = \frac{8}{27}$.

d) $(2x-1)^2 = (2x-1)\cdot(2x-1) = 4x^2 - 2x - 2x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$.

e) La expresión: $(a+b)\cdot(a+b)\cdot(a+b)\cdot(c-d)\cdot(c-d)$ puede escribirse como $(a+b)^3\cdot(c-d)^2$.

Potenciación de exponente negativo:

Si $-n$ es un entero negativo, se define la potencia de exponente negativo así: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Igualmente: $\frac{1}{a^{-n}} = a^n$ y $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Ejemplos:

a) $3^{-4} = \frac{1}{3^4}$. b) $\frac{1}{10^2} = 10^{-2}$. c) $\frac{1}{5^{-3}} = 5^3$. d) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2$.

Potencia de exponente 0: $a^0 = 1$; $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

Ejemplos:

a) $(-4)^0 = 1$; b) $\left(\frac{4}{5}\right)^0 = 1$. (La base, a debe ser distinta de 0, $a \neq 0 \to 0^0$ no tiene sentido).

Para operar con potencias es necesario conocer algunas propiedades (reglas de funcionamiento). Aquí se indican las fundamentales:

$$a^n\cdot a^m = a^{n+m} \qquad (a^n)^m = a^{n\cdot m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^n : a^m = a^{n-m} \qquad (a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

- $10^6\cdot 10^{-2} = 10^{6+(-2)} = 10^4 = 10000$.
- $(10^6)^{-2} = 10^{6\cdot(-2)} = 10^{-12}$.
- $\frac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$; $\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^{4-(-2)} = 3^6$.
- $(3a)^2 = 9a^2$; $(-2x^2)^3 = (-2)^3 x^6 = -8x^6$.
- $\left(\frac{30}{5}\right)^3 = (6)^3 = 216$; $\left(\frac{-1}{5}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{5^3} = \frac{-1}{125}$; $\left(\frac{2}{x^2}\right)^5 = \frac{2^5}{x^{10}}$.

Observaciones:

1) Como siempre, la existencia o no de paréntesis no es indiferente. No es lo mismo $a \cdot b^n$ que $(a \cdot b)^n$. Téngase en cuenta que el punto de multiplicar no suele escribirse. Insisto: $ax^n \neq (ax)^n$.

Ejemplos:

- $2x^3 \neq (2x)^3 = 8x^3$
- $3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
- $(3 \cdot 2)^2 = 6^2 = 36$
- $-2x^4 \neq (-2x)^4 = 16x^4$
- $-2^2 \cdot 5^2 = -4 \cdot 25 = -100$
- $(-2)^3 \cdot (-5)^2 = -8 \cdot 25 = -200$

2) Siempre hay que tener en cuenta las reglas de los signos.

Ejemplos:

- $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^5 = -2^5 = -32$
- b) $-(2x)^4 = -\left(2^4 \cdot x^4\right) = -\left(16 \cdot x^4\right) = -16x^4$.

3) La potenciación funciona bien con productos y cocientes. Funciona mal con sumas y restas; así, por ejemplo, $(a+b)^n$ o $(a-b)^n$ no pueden calcularse de manera sencilla.

Los casos más frecuentes de potencias de sumas o restas son los conocidos "productos notables", que tantos disgustos ocasionan. Las fórmulas correspondientes son:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \; ; \; (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

(Se recordarán cuando operemos con polinomios).

→ Ensaya 5: Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $(-2)^4 + 3^2 - (5 - 4^2)$. b) $\dfrac{5-3^2}{1+3^2}$. c) $\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^2 - \dfrac{4}{2^3}$. d) $\dfrac{2^7 \cdot 15^4}{10^5 \cdot 9^3}$.

Para el caso d) utiliza la descomposición factorial. (Sol. a) 36. b) –0,4. c) –7/18. d) 4/45).

❖ Repítelo con la calculadora.

Si tienes dificultades, pincha aquí.

- **Operaciones con raíces**

Definición de raíz cuadrada de un número: la raíz cuadrada de un número *A* es otro número *a* tal que $a^2 = A$. Simbólicamente se indica así: $\sqrt{A} = a$.

La raíz cuadrada de los números negativos no existe.

La raíz cuadrada de un número puede tomar los dos signos.

→ El cuadrado y la raíz cuadrada son "operadores" opuestos. Esto significa que :

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$; $\sqrt{a^2} = a$. (Aunque si se quiere precisar, habría que escribir, $\sqrt{a^2} = \pm a$).

En general, la raíz de índice *n* se define así: $\sqrt[n]{A} = a \Leftrightarrow a^n = A$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{169} = 13$; $\sqrt{10000} = 100$; $\sqrt{0,04} = 0,2$; $\sqrt{9,61} = 3,1$.

Puede comprobarse en todos los casos que:

$9 = 3^2$; $49 = 7^2$; $169 = 13^2$; $10000 = 100^2$; $0,04 = 0,2^2$; $9,61 = 3,1^2$.

b) Respecto al doble signo de la raíz, puede observase que $\sqrt{9} = \pm 3$, pues tanto 3 como –3 al cuadrado valen 9. Y lo mismo podría decirse de cualquier otra raíz: $\sqrt{9,61} = \pm 3,1$, pues $(3,1)^2 = (-3,1)^2 = 9,61$.

c) $\sqrt[3]{8} = 2$, pues $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{-8} = -2$, pues $(-2)^3 = -8$; $\sqrt[4]{16} = \pm 2$, pues $(\pm 2)^4 = 16$; $\sqrt[4]{-16}$ no existe.

Potencia de exponente racional

- La raíz de índice n puede expresarse como una potencia de exponente racional: $\sqrt[n]{a}=a^{1/n}$.

Notación que resulta coherente, pues aplicando la definición se tiene que $\left(a^{1/n}\right)^n=a^{n/n}=a$.

- En particular, $\sqrt{a}=a^{1/2}$ y $\sqrt[3]{a}=a^{1/3}$. Ambas expresiones son consistentes, pues:

$$\left(a^{1/2}\right)^2=\left(\sqrt{a}\right)^2 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}\cdot 2}=a^{2/2}=a^1=a;\text{ y } \left(a^{1/3}\right)^3=\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}\cdot 3}=a^{3/3}=a^1=a.$$

- En general, si $\dfrac{n}{m}$ es una fracción, se define $a^{n/m}=\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^n$.

Ejemplos:

a) $5^{2/3}=\sqrt[3]{5^2}$. b) $4^{-1/2}=\dfrac{1}{4^{1/2}}=\dfrac{1}{\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2}$. c) $\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2^{5/5}=2^1=2$.

→ Al ser las raíces (los radicales) potencias de exponente fraccionario, para operar con ellas deben tenerse en cuenta las propiedades de la potenciación, recordadas antes. En general, las sumas de radicales son complicadas, salvo que los radicales sean equivalentes; mientras que los productos pueden resultar más sencillos.

Dos radicales son equivalentes cuando tienen el mismo radicando. Por ejemplo $5\sqrt{7}$ y $2\sqrt{7}$. También son equivalentes $\sqrt[4]{25}$ y $\sqrt{5}$, pues $\sqrt[4]{25}=\sqrt[4]{5^2}=5^{2/4}=5^{1/2}=\sqrt{5}$.

Para operar con raíces es necesario conocer algunas propiedades (reglas de funcionamiento). Aquí se indican las fundamentales:

→ Producto de radicales:

$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{1/n}\cdot b^{1/n}=(a\cdot b)^{1/n}=\sqrt[n]{a\cdot b}$. En particular, para raíces cuadradas: $\sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{16\cdot 49}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{49}=4\cdot 7=28$. Se hace la raíz de cada factor y después el producto.

b) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{3\cdot 27}=\sqrt{81}=9$. Se hace el producto de los radicandos y después la raíz.

c) $\sqrt{72}=\sqrt{36\cdot 2}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{2}=6\sqrt{2}$. En este caso se ha extraído el factor 6 de la raíz.

→ Ensaya 6: Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $\sqrt{36\cdot 100}$. b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{125}$. c) $\sqrt{810}$. (Sol. a) 60. b) 25. c) $9\sqrt{10}$).

Potencia de un radical

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$. En particular: $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=\sqrt[n]{a^n}=a$.

Ejemplos:

a) $\sqrt{7^2}=7$; $\left(\sqrt{11}\right)^2=11$; $\left(\sqrt{3}\right)^4=\sqrt{3^4}=3^{4/2}=3^2=9$; $\left(3\sqrt{5}\right)^2=3^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2=9\cdot 5=45$.

b) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$; $\left(\sqrt[3]{2}\right)^4=\sqrt[3]{2^4}=\sqrt[3]{16}$; $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=\sqrt[3]{5^3}=5^{3/3}=5$.

→ Ensaya 7: Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^6$. b) $\left(5\sqrt{3}\right)^2$. c) $\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2$. (Sol. a) 8. b) 75. c) –5).

Cociente de radicales

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$. En particular, para raíces cuadradas: $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

Ejemplos:

a) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\dfrac{50}{10}}=\sqrt{5}$. b) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\dfrac{50}{2}}=\sqrt{25}=5$.

c) $\left(15\sqrt{3}\right):\left(5\sqrt{3}\right)=\dfrac{15\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=\dfrac{15}{5}=3$. d) $\sqrt{\dfrac{150}{4}}=\dfrac{\sqrt{150}}{2}=\dfrac{\sqrt{25\cdot 6}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$.

En los casos a), b) y c) se ha conseguido un resultado simple. En el caso d) se han extraído del radical todos los factores posibles; es otra manera de escribir lo mismo.

→ Ensaya 8: Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$. b) $\dfrac{3\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$. c) $\sqrt{\dfrac{8}{32}}$. (Sol. a) 3. b) 3. c) 1/2).

Suma y resta de radicales

La suma y resta de radicales solo puede "hacerse" cuando intervienen radicales semejantes (los que tienen el mismo radicando). Las expresiones radicales $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ o $-5\sqrt{2}$ son semejantes.

Alguna vez los radicales pueden hacerse semejantes, extrayendo o introduciendo factores en la raíz.

→ Para raíces cuadradas, la introducción o extracción de factores se hace como sigue:

$a\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a^2\cdot b}$. Para introducir un factor se eleva al cuadrado; para extraerlo, se hace su raíz.

Ejemplos:

a) Las siguientes operaciones no pueden simplificarse:

1) $\sqrt{2}+\sqrt{5}$; 2) $3-2\sqrt{3}$.

Estas operaciones pueden aproximarse con la calculadora (poniendo $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ = 3,65028…), pero, salvo que convenga lo contrario, es preferible dejar los resultados con raíces, extrayendo factores y simplificando cuando se pueda.

b) Las siguientes operaciones pueden simplificarse como sigue:

1) $3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$; 2) $12\sqrt{3}-5\sqrt{\underline{12}}=12\sqrt{3}-5\sqrt{\underline{4}\cdot 3}=12\sqrt{3}-5\cdot 2\sqrt{3}=12\sqrt{3}-10\sqrt{3}=2\sqrt{3}$.

c) Las expresiones $3\sqrt{20}$ y $-2\sqrt{125}$ pueden transformarse en otras equivalentes semejantes, pues extrayendo factores: $3\sqrt{20}=3\sqrt{4\cdot 5}=3\cdot 2\sqrt{5}=6\sqrt{5}$, y $-2\sqrt{125}=-2\sqrt{\underline{25}\cdot 5}=-2\cdot\underline{5}\sqrt{5}=-10\sqrt{5}$.

Por tanto, $3\sqrt{20}-2\sqrt{125}=6\sqrt{5}-10\sqrt{5}=-4\sqrt{5}$.

Advertencia:

La extracción de factores es de *factores*, no de sumandos. Esto es, solo pueden extraerse términos que estén multiplicando, no que estén sumando; así, por ejemplo, son errores graves las siguientes ocurrencias:

$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ ← Fatal. $\sqrt{4-a^2}=2-a$ ← Fatal. $\sqrt{9a^2+9}=3a+3$ ← Fatal.

Si se puede extraer factor común dentro de la raíz, quizás pueda extraerse algún factor. Así, por ejemplo:

a) $\sqrt{9a^2+9}=\sqrt{9\left(a^2+1\right)}=3\sqrt{a^2+1}$; b) $\sqrt{a^2+9a^2}=\sqrt{10a^2}=a\sqrt{10}$.

→ Ensaya 9: Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $5\sqrt{2}+3\sqrt{8}$. b) $\frac{1}{3}\sqrt{6}+\frac{3}{2}\sqrt{6}$. c) $\sqrt{16a^2+9a^2}$. c) $\sqrt{16a^2-4}$.

(Sol. a) $11\sqrt{2}$. b) $\frac{11}{6}\sqrt{6}$. c) $5a$. d) $2\sqrt{4a^2-1}$).

Operaciones combinadas con radicales

Hay que tener en cuenta los signos y la prioridad de operaciones.

Ejemplos:

a) $3\cdot\left(5-4\sqrt{2}\right)=15-12\sqrt{2}$.

b) $2\sqrt{3}\cdot\left(5\sqrt{3}+\sqrt{27}\right)=2\cdot5\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=2\cdot5\cdot3+2\sqrt{81}=30+18=48$.

c) $\left(5\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(\sqrt{18}+\sqrt{50}\right)=5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{50}-3\cdot\sqrt{18}-3\cdot\sqrt{50}=$

$=5\cdot\sqrt{36}+2\cdot\sqrt{100}-3\cdot\sqrt{9\cdot2}-3\cdot\sqrt{25\cdot2}=5\cdot6+2\cdot10-3\cdot3\sqrt{2}-3\cdot5\sqrt{2}=50-24\cdot\sqrt{2}$.

Observación: Para realizar productos con paréntesis se multiplican todos los términos del primer paréntesis por todos los del segundo: “todos por todos”.

→ Ensaya 10: Halla el resultado de las operaciones siguientes:

a) $5\sqrt{2}\cdot\left(5\sqrt{2}-3\sqrt{8}\right)$. b) $\left(4\sqrt{2}-3\right)\cdot\left(4\sqrt{2}+3\right)$. (Sol. a) –10. b) 23).

Si tienes dificultades con potenciación de exponente entero pincha aquí.

Si tienes dificultades con extracción e introducción de radicales pincha aquí.

Racionalización de denominadores

Cuando aparecen expresiones fraccionarias con raíces en el denominador, del tipo $\frac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ o $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$, suele pedirse que se *racionalicen*, que se transformen en otras equivalentes a ellas, pero sin raíces en el denominador. (Este es un ejercicio “antiguo” y poco necesario. Lo recuerdo porque el procedimiento es común y útil en el cálculo de límites, entre otros).

Pueden presentarse los siguientes casos: $\frac{a}{\sqrt{b}}$; $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$; $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$.

Se racionalizan multiplicando los dos términos de las fracciones por $\sqrt{b}$, por $b-\sqrt{c}$ y por $\sqrt{b}-\sqrt{c}$, respectivamente.

→ Las expresiones $b+\sqrt{c}$ y $b-\sqrt{c}$ se llaman conjugadas. También son conjugadas $\sqrt{b}+\sqrt{c}$ $\sqrt{b}-\sqrt{c}$. Al multiplicarse entre ellas (suma por diferencia) desaparecen las raíces:

$$\left(b+\sqrt{c}\right)\cdot\left(b-\sqrt{c}\right)=b^2-b\sqrt{c}+\sqrt{c}\cdot b-\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}=b^2-c;$$

$$\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\cdot\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)=\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}+\sqrt{c}\cdot\sqrt{b}-\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}=b-c.$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. b) $\frac{9}{2\sqrt{21}}=\frac{9\cdot\sqrt{21}}{2\sqrt{21}\cdot\sqrt{21}}=\frac{9\sqrt{21}}{2\cdot21}=\frac{9\sqrt{21}}{42}=\frac{3\sqrt{21}}{14}$.

c) $\frac{2}{2+\sqrt{3}}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{4-3}=\frac{2(2-\sqrt{3})}{1}=4-2\sqrt{3}$.

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\left(5+2\sqrt{3}\right)}{\left(5-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{3}\right)}=\dfrac{5\sqrt{3}+2\cdot 3}{5^2-4\cdot 3}=\dfrac{5\sqrt{3}+6}{13}$.

e) $\dfrac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=\dfrac{2\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Halla el resultado de las siguientes operaciones:

a) $-2+(-3)-(-7)+5$; b) $4-3\left(2-3^2\right)$; c) $(-1)^2+(-1)^3+(-1)^4-(-1)^5$.

2. Calcula:

a) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\dfrac{4}{5}-2$; b) $\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\right)\cdot\left(\dfrac{4}{5}-2\right)$; c) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{5}-2$; d) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{4}{5}-2\right)$.

3. Simplificando el resultado, halla:

a) $\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$; b) $\dfrac{12^4\cdot(-3)^5}{36^4}$; c) $\dfrac{10\cdot 8^2\cdot 5}{800}$; d) $\dfrac{6^3\cdot 10^2\cdot 7^3}{49^2\cdot 30^2}$.

4. Simplifica (sin utilizar calculadora):

a) $\left(\sqrt{3}\right)^6$; b) $\left(\sqrt[4]{46}\right)^4$; c) $\sqrt{18\cdot 2}$; d) $\sqrt{\dfrac{1000}{40}}$.

5. Suma, agrupando todo lo que puedas:

a) $5\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{3}+\dfrac{5}{3}\sqrt{3}$; b) $3\sqrt{200}-7\sqrt{8}$; c) $3\sqrt{5}\left(2-\sqrt{5}\right)$; d) $\left(4-\sqrt{3}\right)\cdot\left(4+\sqrt{3}\right)$.

6. Extrae todos los factores que puedas:

a) $\sqrt{4^2+3^2}$; b) $\sqrt{a^2x+a^3x}$; c) $\sqrt{9x^2+81}$; d) $\sqrt{(a+5)^2}$.

7. Racionaliza las expresiones:

a) $\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$; c) $\dfrac{4+\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$.

8. Racionaliza las expresiones:

a) $\dfrac{3-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$; b) $\dfrac{7+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$; c) $\dfrac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; d) $\dfrac{3\sqrt{5}}{10+\sqrt{20}}$.

9. Calcula, simplificando al máximo, el valor de:

a) $\dfrac{\sqrt{56}}{2\sqrt{14}}$; b) $\dfrac{2\sqrt{7}}{3\sqrt{28}}-\dfrac{5\sqrt{32}}{2\sqrt{8}}$; c) $\dfrac{2\sqrt{20}+\sqrt{80}+2\sqrt{125}}{3\sqrt{45}}$