Tema 1. Matrices

1. Definición de matriz

Una matriz de dimensión $n \times m$ es un conjunto de números dispuestos en n filas y m columnas. Así:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior también se puede denotar por $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$.

El elemento a_{ij} es el que ocupa la fila i y la columna j.

Los elementos de cada fila y columna deben estar asociados a alguna característica común del hecho que se representa.

Ejemplos:

a) La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ tiene dimensión 3 × 2: 3 filas; 2 columnas. El elemento $a_{21} = -3$.

b) Una tabla de datos puede considerarse una matriz. Así, los resúmenes numéricos de la cotización en bolsa forman una matriz.

Nombre ▲	Precio	Var	Var %	Máximo	Mínimo
ABERTIS	14,0700	0,12	0,86% ▲	14,07	13,82
ACCIONA	66,0700	-1,36	-2,02% ▼	67,49	65,12
ACERINOX	11,9550	0,28	2,35% ▲	12,02	11,85
ACS	25,6500	-0,52	-1,97% ▼	26,50	25,44

La tabla anterior, que corresponde a un extracto del IBEX35 del día 29/07/16, puede considerarse como una matriz 4 × 5. Cada fila está relacionada con una empresa; las columnas dan razón de lo que se indica arriba: Precio = valor de la acción al cierre; Var = variación del precio respecto al día anterior, en términos absolutos (en verde, subida; en rojo, bajada); Var % = variación porcentual respecto del valor anterior. Este es el dato más significativo;…

El elemento $a_{34} = 12.02$ indica la cotización máxima de ACERINOX ese día. (Muchos programas informáticos, permiten trabajar con matrices; en particular, Excel).

c) Una matriz puede asociarse a los coeficientes y términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales. Así, el sistema que sigue puede escribirse matricialmente como se indica.

Sistema: $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - 2y + 2z = 3 \\ 4x \quad + z = -2 \end{cases} \to$ Matriz asociada: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$.

Cada fila corresponde a una ecuación; cada columna indica los coeficientes de la misma incógnita. La cuarta columna es la de los términos independientes, que suele separarse de las demás trazando una raya vertical. Obsérvese que cuando falta una incógnita se pone un 0 como coeficiente.

1.1. Igualdad de matrices

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y son iguales los elementos correspondientes.

Esto es: $A = B \Leftrightarrow A = (a_{ij})_{n\times m}$, $B = (b_{ij})_{n\times m}$ y $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i y para todo j.

Ejemplo:

Para que las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & d \end{pmatrix}$ sean iguales es necesario que $a = 1$, $b = 0$, $x = 3$ y $d = -5$.

1.2. Matriz traspuesta y matriz opuesta

- La **matriz traspuesta** de una matriz A es la que se obtiene al cambiar las filas por las columnas. Se denota por A^t. Así, si $A = (a_{ij})_{n\times m}$, su traspuesta es $A^t = (a_{ji})_{m\times n}$.

Observación: Otras formas de designar la traspuesta de A son A' o $\overline{A}$.

- La **matriz opuesta** de una matriz A es la que se obtiene al cambiar de signo todos los elementos de la matriz A; se designa por $-A$. Si $A = (a_{ij})_{n\times m}$, su opuesta es $-A = (-a_{ij})_{n\times m}$.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, su traspuesta es $A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$. Su opuesta es $-A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -6 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$.

2. Algunos tipos de matrices

- **Matriz cuadrada**. Una matriz se dice cuadrada cuando tiene el mismo número de filas que de columnas. Las matrices cuadradas de dimensión $n \times n$ suelen describirse como matrices de orden n.

– En las matrices cuadradas se habla de **diagonal principal**, la que va de izquierda a derecha, y de **diagonal secundaria**, que va de derecha a izquierda.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 6 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonal secundaria   Diagonal principal

– Entre las **matrices rectangulares** (las que no son cuadradas) se puede hablar de **matriz fila**, la que tiene una sola fila, y de **matriz columna**, la que tiene una sola columna.

Ejemplos:

Matriz fila: $F = (2 \quad -3 \quad 4)$.   Matriz columna: $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Observa que las matrices anteriores son traspuestas una de otra.

Las componentes (las coordenadas) de un vector suelen darse mediante una de estas matrices. Si se dan en forma de matriz fila, sus elementos suelen separarse por comas. Así: (a_1, a_2, a_3).

– Entre las matrices cuadradas puede hablarse de:

- **Matriz simétrica**. Una matriz A es simétrica cuando es igual a su traspuesta: $A = A^t$.
- **Matriz antisimétrica**. Una matriz A es antisimétrica cuando $A = -A^t$.

Ejemplos:

Simétrica: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 7 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix}$. Antisimétrica: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Matriz triangular**. Una matriz se dice triangular cuando todos los elementos situados por encima (o por debajo) de su diagonal principal son ceros.

Ejemplos:

Triangular superior: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Triangular inferior: $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Matriz diagonal.** Una matriz se llama diagonal cuando son nulos (ceros) todos los elementos situados fuera de su diagonal principal.

Ejemplo:

Son diagonales las matrices $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $D' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Matriz escalar**. Una matriz se llama escalar cuando es diagonal y todos los elementos de su diagonal principal son iguales y no nulos.

Ejemplo:

Son escalares las matrices: $E = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $E' = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz unidad.** Es una matriz escalar con todos los elementos de diagonal iguales a 1. La matriz unidad de orden 3 es la dada arriba; la identidad de orden 2 es $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Matriz nula**. Es la que todos sus elementos valen cero. La matriz nula de orden 2 × 3 es $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Operaciones con matrices: suma y producto por números

3.1. Suma de matrices

Si $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{ij})_{n\times m}$, su suma $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{n\times m}$.

Observación: Para que dos matrices puedan sumarse deben tener la misma dimensión.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+5 & 3-2 \\ -1+4 & 7-9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$.

- **Propiedades de la suma de matrices**

La suma de matrices (para matrices sumables) cumple las propiedades usuales. Esto es:

Asociativa: $A+(B+C)=(A+B)+C$

Conmutativa: $A+B=B+A$

Matriz nula: O: $A+O=O+A=A$

Matriz opuesta: $-A$: $A+(-A)=O$

La existencia de la matriz opuesta permite restar matrices, pues $A-B=A+(-B)$.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-5 & 3+2 \\ -1-4 & 7+9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 16 \end{pmatrix}$.

3.2. Multiplicación de una matriz por un número

Si $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y k es un número real, su producto $k\cdot A=(ka_{ij})_{n\times m}$.

Ejemplo: $3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3\cdot 2 & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

- **Propiedades**

El producto de una matriz por un número cumple las propiedades usuales. Esto es:

$k\cdot(A+B)=k\cdot A+k\cdot B$; $(k+h)\cdot A=k\cdot A+h\cdot A$;

$(k\cdot h)\cdot A=k\cdot(h\cdot A)$; $1\cdot A=A$.

El símbolo · no es imprescindible. Esto es: $k\cdot A=kA$

Observación: Que las operaciones descritas cumplan las propiedades anteriores, se resume diciendo que "el conjunto de matrices de dimensión $n\times m$, respecto de las operaciones suma y producto por escalares, tiene estructura de espacio vectorial".

Ejemplos:

a) $2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 15 & -6 \\ 12 & -27 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix}$.

b) $2\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Multiplicación de matrices

4.1. Producto de una matriz fila por una matriz columna

Si la matriz fila es $F_{1\times m}$ y la matriz columna, $C_{m\times 1}$, el resultado del producto es un número, que se obtiene al sumar los productos ordenados de los elementos de la fila por los de la columna. Esto es:

$$F_{1\times m}\cdot C_{m\times 1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11}\\ b_{21}\\ \dots\\ b_{m1}\end{pmatrix} = a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1m}b_{m1}.$$

Ejemplos:

a) $\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\ -7\\ 3\end{pmatrix} = (1\cdot 5-2\cdot(-7)+3\cdot 3)=28$. b) $\begin{pmatrix}3 & 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ -7\\ 3\end{pmatrix} = (-3)=-3$.

4.2. Producto de dos matrices

Si las matrices son $A=(a_{ij})_{n\times m}$ y $B=(b_{ij})_{m\times p}$, su producto es otra matriz $A\cdot B=(c_{ij})_{n\times p}$.

El elemento c_{ij} de la matriz producto es el resultado de sumar los productos ordenados de los elementos de la fila i de la matriz A por los de la columna j de la matriz B. Esto es:

$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{im}b_{mj}$.

En los siguientes ejemplos se ve cómo se procede.

Ejemplos:

a) Matriz fila $F_{1\times m}$ por $B=(b_{ij})_{m\times p}$ $\rightarrow$ $F_{1\times 3}\cdot B_{3\times 2}=P_{1\times 2}$.

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 5\\ 3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-6+0 & 5+2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 13\end{pmatrix}.$$

b) $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2}=P_{3\times 2}$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 7\\ 1 & 7 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4\\ -3 & 0\\ 9 & -7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 5+0\cdot(-3)+1\cdot 9 & 2\cdot 4+0\cdot 0+1\cdot(-7)\\ 0\cdot 5+(-3)\cdot(-3)+7\cdot 9 & 0\cdot 4+(-3)\cdot 0+7\cdot(-7)\\ 1\cdot 5+7\cdot(-3)+(-1)\cdot 9 & 1\cdot 4+7\cdot 0+(-1)\cdot(-7)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19 & 1\\ 72 & -49\\ -25 & 11\end{pmatrix}.$$

c) Matriz $A=(a_{ij})_{n\times m}$ por matriz columna $C_{m\times 1}$ $\rightarrow$ $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 1}=P_{3\times 1}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & -2\\ 5 & 0 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -4\\ 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3+0+12\\ 9-16-12\\ 15-0-30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\ -19\\ -15\end{pmatrix}.$$

d) $A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2}=P_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot 3+0\cdot 1 & 4\cdot(-2)+0\cdot 5\\ -1\cdot 3+3\cdot 1 & -1\cdot(-2)+3\cdot 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & -8\\ 0 & 17\end{pmatrix}.$$

- **Observaciones sobre el producto de matrices**

Observación 1. Para multiplicar dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera (la situada a la izquierda, matriz *A*) coincida con el número de filas de la segunda (la situada a la derecha, matriz *B*). Esto es: $A_{n\times m}\cdot B_{m\times p} = P_{n\times p}$. Así se ha visto en los ejemplos anteriores: a) $F_{1\times 3}\cdot B_{3\times 2} = P_{1\times 2}$; b) $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 2} = P_{3\times 2}$; c) $A_{3\times 3}\cdot B_{3\times 1} = P_{3\times 1}$; d) $A_{2\times 2}\cdot B_{2\times 2} = P_{2\times 2}$.

Ejemplo:

El producto $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}$ no puede realizarse. El número de columnas de la primera matriz es menor que el de filas de la segunda.

En cambio, sí puede realizarse el producto en sentido contrario: $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -3 & 0 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$. El número de columnas de la primera matriz coincide con de filas de la segunda. (Esto confirma que el producto de matrices no es conmutativo en general).

Observación 2. Continuando con la misma idea. Si, por ejemplo, el producto de una matriz de 4 columnas, $A_{n\times 4}$, por otra matriz de 2 columnas, $B_{m\times 2}$, es una matriz de cuadrada, $P_{p\times p}$, entonces, como $A_{n\times 4}\cdot B_{4\times 2} = P_{n\times 2}$, se tendrá que $n = p = 2$.

Igualmente, si el resultado del producto de una matriz *A*, de dimensión desconocida, por otra matriz *B*, de dimensión 3 × 2, da una matriz *P* de dimensión 4 × 2, entonces, la dimensión de la primera matriz será 4 × 3. En efecto, debe cumplirse: $A_{n\times m}\cdot B_{3\times 2} = P_{4\times 2} \Rightarrow m = 3;\ n = 4$.

- **Propiedades del producto de matrices**

El producto de matrices (para matrices multiplicables) cumple las siguientes propiedades:

Asociativa: $A\cdot(B\cdot C) = (A\cdot B)\cdot C$

Distributiva: $A\cdot(B + C) = A\cdot B + A\cdot C$

Elemento neutro: *I*: $A\cdot I = I\cdot A = A$

La dimensión de *I* dependerá de la de *A*, que debe ser cuadrada.

OJO. El producto de matrices no cumple, en general, las siguientes propiedades:

Conmutativa: $A\cdot B \neq B\cdot A$

Cancelativa: $A\cdot B = A\cdot C$ no implica necesariamente que $B = C$

Divisores de cero: $A\cdot B = O$ no implica necesariamente que $A = O$ ó $B = O$

Consecuencias:

1) Cuando se multiplican dos matrices no es independiente el orden de colocación de los factores; hay que indicar cuál de ellas va a la izquierda, por delante.

Un ERROR frecuente es admitir para dos matrices *A* y *B* que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

También está MAL: $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ y $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

En los tres casos la justificación es la misma. Véase para $(A+B)^2$:

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A\cdot A + A\cdot B + B\cdot A + B\cdot B = A^2 + AB + BA + B^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$, pues, en general, $A\cdot B \neq B\cdot A$.

2) En las ecuaciones matriciales no pueden simplificarse matrices. No existe la división de matrices. → La propiedad cancelativa es válida si A tiene inversa (ya se verá).
3) Si un producto de matrices da la matriz nula no puede deducirse que alguna de las matrices factor sea nula.
4) Los errores en el producto de matrices provienen de la identificación con el producto de números, pues, para a, $b \in \mathbf{R}$, sí es cierto que: $a\cdot b = b\cdot a$; y de $a\cdot b = a\cdot c$, con $a \neq 0$, se deduce que $b = c$; y lo mismo para las demás propiedades.

Ejemplos:
a) No conmutativa. La no conmutatividad es obvia cuando las matrices no pueden multiplicarse en distinto orden. Así, para $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}$, el producto

$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 3\\ 2 & -2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 11\\ 6 & -6 & 12\end{pmatrix}$. En cambio, el producto BA no puede realizarse.

Tampoco se verifica la conmutatividad, aunque pueda realizarse el producto. Así, para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}$:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ -9 & 0\end{pmatrix}\text{; mientras que } BA=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix}.$$

b) No cancelativa. Para las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, puede verse que $AB = AC$ y, sin embargo, $B \neq C$.

En efecto: $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -5 & 0\end{pmatrix}$; $AC=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ -5 & 0\end{pmatrix}$.

c) Divisores de cero. El producto $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, pero ninguna de las matrices que multiplican es nula.

Ejercicio 1
Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que $(A+B)\cdot(A-B)\neq A^2-B^2$

Solución:

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix};\quad A-B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}.$$

$\to (A+B)\cdot(A-B)=\begin{pmatrix}3 & -3\\ -3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -12\\ 12 & 12\end{pmatrix}$.

$\to A^2 = A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}$; $B^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}$.

$\to A^2-B^2=\begin{pmatrix}1 & -8\\ 0 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}7 & -2\\ -6 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -6\\ 6 & 6\end{pmatrix}$.

Evidentemente, $(A+B)\cdot(A-B)\neq A^2-B^2$.

5. Potencia de una matriz cuadrada

La potenciación de matrices se justifica por su relación con procesos económicos, ecológicos, sociales...; procesos a largo plazo, en los que el mismo modelo se repite cada cierto tiempo.

5.1. Definición de potencia de una matriz

Es el concepto análogo a la potenciación numérica. Esto es:

$$A^2 = A\cdot A;\ A^3 = A^2\cdot A = A\cdot A\cdot A;\ \ldots\ A^n$$

Obtener la expresión de la potencia de una matriz es un proceso laborioso; naturalmente dependerá del tamaño de A y del exponente n. Algunas veces resulta asequible dar una expresión general para A^n.

Ejemplo:

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ → Está MAL: $A^2 = \begin{pmatrix} 1^2 & 2^2 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = A\cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix};\ A^4 = A\cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}.$$

En este caso es fácil deducir que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Observación: La certeza de que A^n tiene una determina expresión se fundamenta en el método de demostración por inducción, que básicamente consiste en demostrar que una propiedad es cierta para el siguiente de cualquier número natural n. Por tanto, si es cierta para 1, lo será para 2, y para 3, y *así sucesivamente*. El proceso de demostración es el siguiente:

1) Se hace una conjetura para la fórmula que se pretende demostrar. (Esa conjetura se realiza a partir de diversos ensayos).

2) Se comprueba que esa conjetura es cierta para $n = 1$. (De hecho, para hacer la conjetura ha debido comprobarse incluso para $n = 2$ y $n = 3$, pues la conjetura debe hacerse sobre algunas pruebas).

3) Dar por cierto que la conjetura se cumple para cualquier valor de n y demostrar, que, si es así, también se cumple para $n + 1$, para el siguiente.

Ejemplo:

Para la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, vista en el ejemplo anterior, ya se hizo la conjetura, que

$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$, y comprobado su certeza para $n = 1\ldots$

– Falta demostrar el paso 3): que dicha fórmula vale para el siguiente, para $n + 1$. Esto es, que

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Se demuestra multiplicando:

$$A^{n+1} = A\cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 + 2\cdot 3^n \\ 0 & 3\cdot 3^n \end{pmatrix} \Rightarrow A^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

6. Algunas propiedades relacionadas con la matriz traspuesta

Dada la matriz $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$, su traspuesta es la matriz $A^t=\left(a_{ji}\right)_{m\times n}$.

La trasposición de matrices se comporta, respecto de las operaciones algebraicas, como sigue:

- Traspuesta de la matriz traspuesta: $\left(A^t\right)^t=A$.
- Traspuesta de la suma de matrices: $(A+B)^t=A^t+B^t$.
- Traspuesta de un número por una matriz: $(kA)^t=kA^t$.
- Traspuesta de un producto de matrices: $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$, siendo $A_{n\times m}$ y $B_{m\times p}$.
- **Matriz ortogonal**. La matriz A es ortogonal si $A\cdot A^t=I$.

Ejemplos:

a) Para $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ puede comprobarse que $(A+B)^t=A^t+B^t$.

En efecto:

$$A+B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & -1\\ 5 & 2\end{pmatrix}\to(A+B)^t=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$A^t+B^t=\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 5\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

b) Para $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $k=-2$ puede comprobarse que $(kA)^t=kA^t$.

En efecto: $-2A=-2\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}\to(-2A)^t=\begin{pmatrix}-14 & -2\\ 0 & 6\end{pmatrix}$.

Por otra parte: $-2\cdot A^t=-2\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14 & 0\\ -2 & 6\end{pmatrix}$.

c) Para $A=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}$ puede comprobarse que $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$.

En efecto:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 0 & 4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -7 & 21\\ 2 & -13 & 18\end{pmatrix}\to(A\cdot B)^t=\begin{pmatrix}14 & 2\\ -7 & -13\\ 21 & 18\end{pmatrix}.$$

Por otra parte:

$$B^t\cdot A^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -1 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 1\\ 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 2\\ -7 & -13\\ 15 & 18\end{pmatrix}.$$

d) La matriz $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ es ortogonal, pues $A\cdot A^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

7. Álgebra de matrices (I)

Como se viene advirtiendo, el producto de matrices no verifica todas las propiedades usuales; ello induce a la comisión de errores frecuentes al operar con matrices. Para que el lector adquiera cierta destreza en estas operaciones se proponen los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1. Resolver ecuaciones en las que intervienen matrices

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e I la identidad de orden 2.

a) Encuentra el valor o valores de x de forma que $B^2=A$.
b) Determina x para que $A\cdot B=I$.
Solución:

a) $B^2=B\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to B^2=A \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=1$.

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix} \to A\cdot B=I \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x+1 \\ x+1 & x+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x=-1$.

Ejercicio 2. Imponer que el producto sea conmutativo

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix}$, determina a, b y c para que $AP = PA$.

Solución:
Si se desea que $AP = PA$, entonces:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & c \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+4 & b+2c \\ -2a+6 & -2b+3c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a-2b & 2a+3b \\ 2-2c & 4+3c \end{pmatrix}.$$

Igualando los elementos correspondientes:

$$\begin{cases} a+4=a-2b & \to b=-2 \\ b+2c=2a+3b & \to c=a-2 \\ -2a+6=2-2c \\ -2b+3c=4+3c \end{cases} \Rightarrow P=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 2 & a-2 \end{pmatrix} \to \text{Una de ellas es: } P=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3. Resolver sistemas lineales de dos ecuaciones matriciales con dos incógnitas

Resuelve el siguiente sistema $\begin{cases} 3X+2Y=A \\ 2X-3Y=B \end{cases}$, siendo $A=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$, y X e Y matrices desconocidas.

Solución:
Aplicando el método de reducción para la resolución de sistemas:

$$\begin{cases} 3X+2Y=A \\ 2X-3Y=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} 2E1 \\ 3E2 \end{matrix}\begin{cases} 6X+4Y=2A \\ 6X-9Y=3B \end{cases} \Rightarrow \text{Restando: } 13Y=2A-3B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13Y=2\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow 13Y=\begin{pmatrix} 13 & 0 \\ 13 & 26 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$3X+2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow 3X=\begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4. Resolver otras ecuaciones no lineales

Halla todas las matrices X que satisfacen la ecuación $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Solución:

El producto de matrices exige que las dimensiones de las matrices que intervienen sean como se indican: $A_{n\times m} \cdot B_{m\times p} = P_{n\times p}$.

En este caso: $A_{2\times 2} \cdot X_{m\times p} = P_{2\times 3} \Rightarrow m = 2$ y $p = 3$.

Por tanto, la matriz X debe ser de dimensión 2 × 3. Si se supone que $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} d & e & f \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ e = 0 \\ f = 1 \end{cases},$$

mientras que los valores de a, b y c pueden ser cualesquiera.

En consecuencia, las matrices X que satisfacen la ecuación dada son: $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Aplicar algunas regularidades para abreviar cálculos

Comprueba que la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ es periódica de periodo 3. Esto es, que verifica la igualdad $A^4 = A$. Utilizando ese resultado, calcula A^{14}, A^{231}, A^{232} y A^{233}.

Solución:

Multiplicando, se tiene que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \Rightarrow A \cdot A^3 = A \cdot I \Leftrightarrow A^4 = A.$$

Luego, efectivamente es periódica de periodo 3.

Como $A^3 = I \Rightarrow A^{12} = \left(A^3\right)^4 = I^4 = I \Rightarrow A^{13} = A^{12} \cdot A = I \cdot A = A \Rightarrow A^{14} = A^{12} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2$.

En general, puede observarse que las potencias de exponente un múltiplo de 3:

$$A^{3n} = \left(A^3\right)^n = I^n = I$$

Por tanto: $A^{3n+1} = A^{3n} \cdot A = I \cdot A = A$; $A^{3n+2} = A^2$.

Como $A^{231} = A^{3\cdot 77}$, $A^{232} = A^{3\cdot 77+1}$ y $A^{233} = A^{3\cdot 77+2}$, entonces:

$$A^{231} = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \; A^{232} = A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \; A^{233} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Rango de una matriz

8.1. Definición de dependencia lineal entre filas de una matriz.

Cuando los elementos de una fila son proporcionales a los correspondientes de cualquier otra se dice que ambas filas son **linealmente dependientes**. Si, por ejemplo, esas filas son la primera y segunda, $F1$ y $F2$, entonces existirá un número $k \neq 0$ tal que $F2 = kF1$.
Dos filas son **linealmente independientes** cuando no hay relación de proporcionalidad entre sus elementos correspondientes; esto es, cuando una fila no puede obtenerse multiplicando la otra por un constante: $F_i \neq kF_j$.

- Si lo extendemos a tres filas, pongamos la primera, segunda y tercera $(F1,\ F2,\ F3)$, si existen dos números p y q, tales que $F3 = pF1 + qF2$, entonces la tercera fila depende linealmente de las dos primeras; en caso contrario son linealmente independientes.
- El mismo concepto puede definirse para las columnas de una matriz. Si existen dos números p y q, tales que $C3 = pC1 + qC2$, entonces la tercera columna depende linealmente de las otras dos. En caso contrario las columnas serán linealmente independientes.

Ejemplos:
Para las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

puede observarse:

a) En la matriz A, la fila segunda es el triple de la primera: $F2 = 3F1$. Ambas filas son linealmente dependientes. (Puede observarse que $F2 = 3F1 \Leftrightarrow F1 = F1/3$).
b) En la matriz B se cumple que $F3 = F2 - F1$: la fila 3 depende de las dos primeras. (Puede observarse que $F3 = F2 - F1 \Leftrightarrow F2 = F1 + F3 \Leftrightarrow F1 = F2 - F3$).
c) En la matriz C se cumple que $C3 = -C1$: las columnas primera y tercera son linealmente dependientes. Además, $C4 = 2C1 + C2$: la columna cuarta depende de las dos primeras.
d) En la matriz D, las tres filas son linealmente independientes: ninguna fila o columna puede expresarse en función de las otras.

8.2. Rango de una matriz. ¿Cómo se calcula?

El rango de una matriz se define como el número de filas linealmente independientes que tiene dicha matriz. (Ese número coincide con el número de columnas linealmente independientes de esa misma matriz). Por tanto, para calcular su rango hay que ir eliminando (quitando) las filas o columnas que dependan de otras; las que queden linealmente independientes son las que determinan el rango.

Ejemplos:
Para las matrices del ejemplo anterior, y atendiendo a lo dicho allí, se tiene:

a) En la matriz A puede eliminarse la $F2$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ \cancel{3} & \cancel{-6} & \cancel{9} \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \to$ quedan 2 filas independientes

$\Rightarrow$ rango de A = 2.

b) En la matriz B puede eliminarse la $F3$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & 6\\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3}\end{pmatrix}$ → rango de B = 2.

c) En la matriz C pueden eliminarse las columnas $C3$ y $C4$, $C=\begin{pmatrix}1 & -3 & -\cancel{1} & -\cancel{1}\\ 2 & 1 & -\cancel{2} & \cancel{5}\\ -1 & 0 & \cancel{1} & -\cancel{2}\end{pmatrix}$ →
rango de C = 2. ($C3$ se tacha porque depende de $C1$: $C3$ = –$C1$; $C4$, por ser $C4=2C1+C2$).

d) El rango de la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 1 & 6\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ es 3, pues ninguna fila depende de otras.

Observación: El rango de una matriz es independiente de cómo se calcule, por filas o por columnas. Por tanto, el rango es como máximo igual al menor número que determina la dimensión de la matriz: el rango de $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ es menor o igual que el mínimo de n y m.
Así, para la matriz C de más arriba, que es de dimensión 3 × 4, su rango no puede ser mayor que 3. (Se ha visto que es 2).

- **Transformaciones de Gauss**.

Las transformaciones de Gauss (Alemania, 1777–1855) son cambios que se realizan en la matriz para simplificarla y poder determinar su rango con facilidad, pues habitualmente las combinaciones lineales no se descubren de manera inmediata. El objetivo de este proceso es conseguir que aparezcan el mayor número de ceros entre los elementos de la matriz. Estas transformaciones no varían su rango, siendo algunas de ellas las siguientes:
1) Una matriz no cambia su rango si las filas (o columnas) cambian de orden.
2) Una matriz no cambia su rango si todos los elementos de una fila (o columna) se multiplican por un mismo número distinto de 0.
3) Una matriz no cambia su rango si a los elementos de una fila (o columna) se les suma o resta los elementos correspondientes de cualquier otra fila (o columna) multiplicados por cualquier número.

Al realizar estas transformaciones elementales, si se obtiene una fila de ceros, o dos filas iguales, o dos filas proporcionales, se suprime la fila nula o una de las dos proporcionales. Finalizado el proceso, el número de filas no nulas que queden en la matriz es el correspondiente a su rango.
Así, el rango de una matriz puede definirse también como el número de filas no nulas que tiene dicha matriz. (Una fila es nula cuando todos sus elementos son ceros).

Ejemplos:
Para las matrices del ejemplo anterior, pueden realizarse las transformaciones siguientes:

a) En la matriz A: 1) Restar a la segunda fila el triple de la primera; 2) Restar a la tercera fila el doble de la primera. Esto es: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 3 & -6 & 9\\ 2 & 0 & 5\end{pmatrix} \to A=\begin{array}{r}\\ F2-3F1\\ F3-2F1\end{array}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0}\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}$.

Quedan 2 filas no nulas ⇒ rango de A = 2. (Si se observa la proporcionalidad inicial no es necesario hacer las transformaciones. Bastaría con decir: se suprime $F2$, pues $F2=3F1$).

b) En la matriz B: 1) A $F2$ se le resta $2 \cdot F1$; 2) A $F3$ se le resta $F1$. Esto es:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{matrix} B = \\ F2-2F1 \\ F3-F1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \to \text{Queda } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$ Su rango es 2.

c) En la matriz C: 1) La columna 2 se sustituye por $C2+3C1$; 2) $C3$ por $C3+C1$; 3) $C4$ por $C4+C1$

$$C4+C1 \to C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 7 \\ -1 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \text{Queda } C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Su rango es 2.

d) En la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ninguna de las transformaciones posibles genera una fila de ceros. Su rango es 3.

Observaciones:
1) Una buena estrategia consiste en "hacer" el máximo número de ceros en alguna fila o columna.
2) En el tema de determinantes se verá otra técnica para calcular el rango.

9. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada A es inversible (o invertible) si existe otra matriz, de igual tamaño, que se denota por A^{-1} y se llama matriz inversa de A, tal que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$, siendo I la matriz identidad del mismo orden que A.

Observación. No toda matriz tiene inversa. Para que una matriz tenga inversa es necesario que sea cuadrada y que su rango coincida con su orden.

Ejemplos:

a) La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Para comprobarlo basta con ver que $A \cdot A^{-1} = I$. En efecto: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+5 & -5+5 \\ 4-4 & 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

b) La inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

En efecto:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

9.1. Cálculo de la matriz inversa

- **Método directo**

Consiste en partir de una matriz A^{-1} genérica e imponer que cumpla la condición de que sea la inversa de *A*; esto es, que $A \cdot A^{-1} = I$. Los pasos a seguir son:
1) Se escribe A^{-1} en función de tantas incógnitas como sea necesario: 4, si es una matriz de orden 2; 9, si es de orden 3;...
2) Se hace el producto $A \cdot A^{-1}$ y se iguala a la matriz *I* del mismo tamaño.
3) Resolviendo el sistema de ecuaciones resultante se obtienen los elementos de A^{-1}.

Ejemplo:
Si $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, se supone que $A^{-1}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

Haciendo el producto $A \cdot A^{-1}$ e igualando a $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ se tiene:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+5c & b+5d\\ -a-4c & -b-4d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I \Rightarrow \begin{cases}a+5c=1\\ -a-4c=0\\ b+5d=0\\ -b-4d=1\end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a = -4$, $c = 1$; $b = -5$, $d = 1$.

Luego, la matriz inversa buscada es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

- **Método de Gauss–Jordan**

El método de Gauss–Jordan (W. Jordan, Alemania, 1842–1899) para el cálculo de la matriz inversa consiste en la resolución esquemática del sistema de arriba. Para aplicar el método:
1) Se añade, a la derecha de la matriz *A*, la matriz identidad. Se forma así la matriz $(A|I)$.
2) Se transforma esa matriz ampliada, mediante sumas y restas de filas, hasta llegar a la matriz $(I|A^{-1})$. Esto es, la matriz obtenida a la derecha es la inversa buscada.

Para ello hay que conseguir sucesivamente que, en la matriz izquierda, inicialmente *A*, los valores de sus términos sean: $a_{11} = 1$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = 1$; $a_{12} = 0$. Eso para matrices de tamaño 2 × 2. Para las de tamaño 3 × 3, hay que buscar, sucesivamente, que: $a_{11} = 1$; $a_{21} = 0$; $a_{31} = 0$; $a_{22} = 1$; $a_{32} = 0$; $a_{33} = 1$; $a_{23} = 0$; $a_{13} = 0$; $a_{12} = 0$.

Ejemplos:
<u>Observación</u>: En los casos que siguen, *F*1, *F*2 y *F*3 indican las filas 1ª, 2ª o 3ª de la matriz precedente. (Así se hará siempre).

a) Para la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -1 & -4\end{pmatrix}$, se forma la matriz ampliada $(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 5 & 1 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 1\end{array}\right)$.

Se hacen las siguientes transformaciones:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 5 & 1 & 0\\ -1 & -4 & 0 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{r}\\ F2+F1\end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 5 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right) \to \begin{array}{r}F1-5F2\\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -4 & -5\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)=(I|A^{-1})$$

La matriz inversa de *A* es $A^{-1}=\begin{pmatrix}-4 & -5\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

b) Para hallar la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ se puede proceder como sigue:

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} F2-F1 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} \\ F2-5F1 \\ F2+F1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} \\ \\ -F3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{r} F1+F3 \\ F2-F3 \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \begin{array}{r} F1+F2 \\ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

La matriz inversa buscada es $A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Observación: Si en la matriz izquierda, la *A* inicial, se generase una fila de ceros, la matriz *A* no tendría inversa. Se termina el proceso.

9.2. Algunas propiedades relacionadas con la matriz inversa

Las más usadas son:
1) Si la matriz *A* tiene inversa, su inversa es única.
2) Si una fila o una columna de la matriz *A* es nula, entonces *A* no es inversible.
3) Si *A* y *B* son invertibles y del mismo tamaño, entonces su producto también tiene inversa, y se cumple que: $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.
4) Si *A* es inversible, entonces su traspuesta también lo es, y se cumple que: $\left(A^t\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^t$.

10. Álgebra de matrices (II)

Como ya se viene advirtiendo, el producto de matrices no verifica las propiedades acostumbradas; ello induce a la comisión de errores frecuentes al operar con matrices.

Tampoco puede hablarse de división de matrices. No existe el cociente $\dfrac{A}{B}$, ni siquiera debería escribirse; existen los productos $A\cdot B^{-1}$ y $B^{-1}\cdot A$, que no son iguales.
Para que el lector adquiera cierta destreza en estas operaciones se proponen en este apartado algunos ejercicios complementarios.

Ejercicio 1. Potencia de un producto
Si *A* y *B* son matrices cuadradas del mismo orden, ¿es cierto que $(A\cdot B)^2=A^2\cdot B^2$?
Solución:
Para que se verifique la igualdad $(AB)^2=A^2B^2$ es necesario que las matrices sean conmutables, que *AB* = *BA*, pues:

$$(AB)^2=(AB)(AB)=A\cdot B\cdot A\cdot B=\underline{A(B\cdot A)}B \text{ = (si } AB = BA\text{) } =\underline{A(A\cdot B)}B=A\cdot A\cdot B\cdot B=A^2\cdot B^2$$

Nuevamente se observa que el producto de matrices no cumple las propiedades habituales.

Ejercicio 2. Una aplicación

Una perfumería ha vendido en los últimos años las cantidades que se indican en la matriz *A*, a los precios (en euros) que se dan en la matriz *B*.

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2013 & 2014 & 2015 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 890 & 750 & 970 \\ 1230 & 1100 & 1320 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \text{Hombre} \\ \text{Mujer} \end{array} \qquad B=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Hombre} & \text{Mujer} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 34 & 43 \\ 32 & 40 \\ 35 & 45 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} 2013 \\ 2014 \\ 2015 \end{array}$$

a) Halla la matriz $B{\cdot}A$. ¿Cuánto se ingresó cada año por la venta de perfumes? ¿Qué elementos de la matriz $B{\cdot}A$ dan esa información?

b) ¿En qué orden hay que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por venta de perfumes de hombre y de mujer durante esos tres años? ¿Qué ingresos se obtienen?

Solución:

a) $B{\cdot}A=\begin{pmatrix} 34 & 43 \\ 32 & 40 \\ 35 & 45 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 890 & 750 & 970 \\ 1230 & 1100 & 1320 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 83150 & 72800 & 89740 \\ 77680 & 68000 & 83840 \\ 86500 & 75750 & 93350 \end{pmatrix}=C$.

Los elementos $c_{11}=83150=34{\cdot}890+43{\cdot}1230$ €, $c_{22}=68000=32{\cdot}750+40{\cdot}1100$ € y $c_{33}=93350=35{\cdot}970+45{\cdot}1320$ € indican los ingresos de los años 2013, 2014 y 2015, respectivamente. (Los demás elementos de *C* no tienen ningún significado en este contexto).

b) Hay que multiplicar *A* por *B*.

$$A{\cdot}B=\begin{pmatrix} 890 & 750 & 970 \\ 1230 & 1100 & 1320 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 34 & 43 \\ 32 & 40 \\ 35 & 45 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 88210 & 111920 \\ 123220 & 156290 \end{pmatrix}=D.$$

El elemento $d_{11}=890{\cdot}34+750{\cdot}32+970{\cdot}35=88210$ € da los ingresos obtenidos por la venta de los perfumes para hombre en esos tres años.

El elemento $d_{22}=1230{\cdot}43+1100{\cdot}40+1320{\cdot}45=156290$ € da los ingresos obtenidos por la venta de los perfumes para mujer en esos tres años.

Los demás elementos de la matriz *D* no tienen ningún significado en este contexto.

Observación: Pueden verse más problemas de este estilo pinchado aquí: números 19 a 24.

Ejercicio 3. Ecuaciones matriciales

Despeja la matriz *X* en cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $A{\cdot}X=B$ b) $X{\cdot}A=B$ c) $X{\cdot}A+X=B$ d) $A^{-1}{\cdot}X{\cdot}A=B$

Solución:

a) Hay que multiplicar ambos miembros, por la izquierda, por A^{-1}. Queda:

$$A{\cdot}X=B \Leftrightarrow A^{-1}(A{\cdot}X)=A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}B \Rightarrow I{\cdot}X=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B.$$

b) Hay que multiplicar ambos miembros, por la derecha, por A^{-1}. Queda:

$$X{\cdot}A=B \Leftrightarrow (X{\cdot}A)A^{-1}=BA^{-1} \Rightarrow X{\cdot}(AA^{-1})=BA^{-1} \Rightarrow X{\cdot}I=BA^{-1} \Rightarrow X=BA^{-1}.$$

c) Primero se saca factor común; a continuación, se multiplica por la inversa que proceda. Así:

$$X{\cdot}A+X=B \Leftrightarrow X{\cdot}A+X{\cdot}I=B \Rightarrow X(A+I)=B \Rightarrow X(A+I)(A+I)^{-1}=B(A+I)^{-1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=B(A+I)^{-1}.$$

d) Se multiplican ambos miembros, por la izquierda, por *A*; y por la derecha, por A^{-1}. Así:

$$A^{-1}{\cdot}X{\cdot}A=B \Leftrightarrow A(A^{-1}XA)A^{-1}=ABA^{-1} \Rightarrow (AA^{-1})X(AA^{-1})=ABA^{-1} \Rightarrow X=ABA^{-1}.$$

Ejercicio 4. Resolver ecuaciones matriciales

a) Despeja la matriz X en función de A e I en la ecuación $(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I$, siendo X y A matrices cuadradas de orden dos, e I la matriz identidad de orden dos.

b) Resuelve la ecuación $B\cdot X + B^2 = I$, si $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Operando se tiene:

$$(X+A)^2 = X^2 + X\cdot A + I \Leftrightarrow X^2 + A\cdot X + X\cdot A + A^2 = X^2 + X\cdot A + I \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow A\cdot X + A^2 = I \Leftrightarrow A\cdot X = I - A^2 \Rightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}(I - A^2) \Rightarrow X = A^{-1} - A.$$

b) De $B\cdot X + B^2 = I \Rightarrow B\cdot X = I - B^2 \Rightarrow B^{-1}\cdot B\cdot X = B^{-1}(I - B^2) \Rightarrow X = B^{-1} - B$.

Cálculo de la inversa;

$$(B|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to F2-F1\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to -F2\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \to$$
$$\to F1-F2\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto: $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Resolver ecuaciones matriciales

a) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, comprueba que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Para esas matrices halla la matriz X, que es solución de la ecuación $BXA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Debe cumplirse que $A\cdot A^{-1} = I$ y $B\cdot B^{-1} = I$.

En efecto:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,;\ B\cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

b) Si $BXA = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X = B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}A^{-1} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 6. Una demostración

Demuestra que si A y B son matrices invertibles del mismo orden, entonces $(A\cdot B)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Solución:

Si X es la inversa de $A\cdot B$: $X = (A\cdot B)^{-1} \Rightarrow (A\cdot B)\cdot X = I \Rightarrow A\cdot B\cdot X = I \Rightarrow X = ? \to$

(Para despejar X se multiplica, primero por A^{-1} por la izquierda; y a continuación, por B^{-1}, también por la izquierda).

$$\to A\cdot B\cdot X = I \Rightarrow \underline{A}^{-1}\cdot A\cdot B\cdot X = \underline{A}^{-1}\cdot I \Rightarrow B\cdot X = A^{-1} \Rightarrow \underline{B}^{-1}\cdot B\cdot X = \underline{B}^{-1}\cdot A^{-1} \Rightarrow X = B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

Problemas propuestos

Operaciones con matrices

1. Dadas $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -9 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -11 & 12 \\ -14 & 41 \end{pmatrix}$, halla dos números *a* y *b* para que se verifique que $a\cdot A+b\cdot B=C$.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, halla otras dos matrices del mismo orden, *X* e *Y*, que cumplan: $\begin{cases} 2X-Y=A \\ X+3Y=2B \end{cases}$.

3. Para las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, comprueba que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $A+(B+C)=(A+B)+C$ b) $A(B+C)=AB+AC$

c) $(A-B)C=AC-BC$ d) $A(BC)=(AB)C$

4. Calcula, si es posible, los productos *AB* y *BA* para las matrices siguientes:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ d) $A=\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

e) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ f) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

5. Calcula todos los productos posibles de dos factores con las matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

6. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, halla los productos *AB* y *BA*. Además de que no se cumple la propiedad conmutativa, ¿qué otro comentario puede hacerse?

7. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, comprueba que AB = AC, y, sin embargo, $B\neq C$.

8. Para la matriz $A=\begin{pmatrix}a & 1\\ 0 & -a\end{pmatrix}$, calcula el valor de a para que $A^2-A=\begin{pmatrix}12 & -1\\ 0 & 20\end{pmatrix}$.

9. a) Halla las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}$ que cumplen que $A^3=A$.

b) Para esas matrices y para el valor a = –2, calcula $A^{10}+A^{11}+A^{12}$.

10. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, encuentra la expresión general de A^n. ¿Cuál es la matriz $A^{10}-10A$?

Comprobación de algunas propiedades

11. Una matriz A se llama nilpotente si $A\cdot A\cdot\ldots\cdot A=O$. Comprueba que la matriz
$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{pmatrix}$ es nilpotente.

12. Una matriz A se llama involutiva si cumple que $A^2=A\cdot A=I$. Comprueba que la matriz
$A=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -8 & -7\end{pmatrix}$ es involutiva.

13. Una matriz A se llama idempotente si cumple que $A^2=A\cdot A=A$. Comprueba que la matriz
$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -6\\ 2 & -1 & 6\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$ es idempotente.

14. Una matriz A se llama periódica de período p si $A^{p+1}=A$. Comprueba que la matriz
$A=\begin{pmatrix}4 & -3 & -3\\ 5 & -4 & -4\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ es periódica de periodo 3.

15. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

a) Calcula $A\cdot B$ y $B\cdot A$. ¿Se cumple que $A\cdot B=B\cdot A$?

b) Comprueba que $(A+B)^2=A^2+B^2$.

16. Una matriz A es ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$; esto es, cuando su inversa coincide con su traspuesta. Halla el valor de a para que sea ortogonal la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ a & 0 & -a \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

17. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comprueba las siguientes propiedades:

a) $(A^t)^t = A$ b) $(A+B)^t = A^t + B^t$ c) $(kA)^t = kA^t$

18. Para las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ comprueba que $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

19. (Propuesto en Selectividad 2006, Castilla y León)

Halla las matrices A cuadradas de orden 2, que verifican la igualdad: $A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}A$.

Rango de una matriz

20. Utilizando transformaciones de Gauss halla el rango de las siguientes matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -6 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

21. Determina, en función de los valores de a, el rango de las matrices:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \end{pmatrix}$

22. Determina, en función de los valores de a, b y c, el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{pmatrix}.$$

Inversa de una matriz

23. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, comprueba que su inversa es ella misma; esto es, que $A^{-1} = A$.

24. Halla por dos métodos distintos (directamente y aplicando el método de Gaus–Jordan) la inversa de cada una de las siguientes matrices, si existe.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$

25. Aplicando el método de Gaus–Jordan halla, cuando exista la inversa de cada una de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$

26. Calcula la matriz A que haga que $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}2 & 1\\ 5 & 3\end{pmatrix}$. Halla la solución de dos maneras: 1) Sin calcular la matriz inversa; 2) Calculándola.

27. (Propuesto en Selectividad 1997, Madrid)

Calcula los valores del parámetro λ para que la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}\lambda & -2\\ 5 & -\lambda\end{pmatrix}$ coincida con su opuesta.

Otros problemas

28. Resuelve el sistema $\begin{cases}2X-3Y=A\\ 3X+4Y=B\end{cases}$, siendo $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

29. Dadas las matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}x & -2\\ 0 & x\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Encuentra el valor de x para que $B^2=A$.
b) Encuentra el valor de x para que $A+2B+C=I$, siendo I la identidad de orden 2.

30. Resuelve la ecuación matricial: $X\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 0 & 5\\ -1 & 7\end{pmatrix}$.

31. Una fábrica de electrodomésticos ha vendido en los últimos tres años lavadoras (L) y secadoras (S). La matriz A expresa las unidades vendidas; la matriz B da el precio de venta, en euros, de cada electrodoméstico.

$$A=\begin{array}{c c} \begin{array}{ccc}2013 & 2014 & 2015\end{array} & \\ \begin{pmatrix}3500 & 7500 & 4200\\ 2200 & 6000 & 5300\end{pmatrix} & \begin{array}{c}L\\ S\end{array}\end{array} \qquad B=\begin{array}{c c} \begin{array}{cc}L & S\end{array} & \\ \begin{pmatrix}480 & 370\\ 460 & 360\\ 500 & 340\end{pmatrix} & \begin{array}{c}2013\\ 2014\\ 2015\end{array}\end{array}$$

a) Halla la matriz $B{\cdot}A$. ¿Cuánto se ingresó cada año por la venta de esos electrodomésticos? ¿Qué elementos de la matriz $B{\cdot}A$ dan esa información?
b) ¿En qué orden hay que multiplicar las matrices para obtener los ingresos por venta de cada electrodoméstico durante esos tres años? ¿Qué elementos de esa matriz dan esa información?

32. En una prueba de pentatlón, que constan de carreras de 200 y 1500 m, de salto de longitud y lanzamientos de disco y jabalina, de tres atletas $A1$, $A2$ y $A3$ han obtenido las puntuaciones que se indican en la matriz $A = \begin{array}{c} \\ A1 \\ A2 \\ A3 \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \scriptstyle 200 & \scriptstyle 1500 & \scriptstyle Lon & \scriptstyle Dis & \scriptstyle Jab \end{array} \\ \begin{pmatrix} 8 & 7 & 6 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 3 & 10 \\ 9 & 6 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \end{array}$1. La ponderación de cada prueba varía según el jurado Ji (i = 1, 2, 3) que califique, como muestra la matriz $J = \begin{array}{c} \\ 200 \\ 1500 \\ Lon \\ Dis \\ Jab \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} J1 & J2 & J3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1{,}5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \\ 2 & 2 & 1{,}5 \end{pmatrix} \end{array}$.
¿Cuál sería la puntuación de cada atleta dependiendo de cada jurado? Si la puntuación definitiva se halla sumando las de los tres jurados, ¿cómo se establece el podio de la prueba?

33. Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Utiliza la igualdad anterior para determinar la inversa de A y A^6.

34. (Propuesto en Selectividad 2016, Andalucía)
Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.
Resuelve la ecuación matricial $A^2{\cdot}X + C = 2B$.

Soluciones

1. $a = 2$; $b = -3$.

2. $X = \begin{pmatrix} 1 & -18/7 \\ 8/7 & -18/7 \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} 1 & -22/7 \\ 2/7 & -8/7 \end{pmatrix}$.

4. a) $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. b) $AB = \begin{pmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \\ -16 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 22 & -10 \end{pmatrix}$.

c) $AB = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. d) $BA = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$. e) $AB = -11$; $BA = \begin{pmatrix} -8 & -12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 9 & -3 \end{pmatrix}$.

f) $AB = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -14 \\ -2 & -8 & 15 \\ 5 & -14 & 6 \end{pmatrix}$; $BA = \begin{pmatrix} 13 & -9 & 5 \\ 27 & -10 & 1 \\ -19 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $A\cdot C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -7 & 6\end{pmatrix}$; $C\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 6 & -4\\ -1 & 13 & -8\\ 2 & 7 & -6\end{pmatrix}$; $B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -6 & 4\\ 3 & 9 & -8\\ -5 & 23 & -12\end{pmatrix}$.

6. $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $BA=\begin{pmatrix}-10 & 20\\ -5 & 10\end{pmatrix}$. El producto de dos matrices no nulas da la matriz nula.

7. $AB=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 10\end{pmatrix}$; $AC=\begin{pmatrix}0 & 5\\ 0 & 10\end{pmatrix}$.

8. $a = 4$.

9. a) $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ 1/a & 0\end{pmatrix}$. b) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1/2 & 2\end{pmatrix}$.

10. $A^n=\begin{pmatrix}1 & na\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix}-9 & 0\\ 0 & -9\end{pmatrix}$.

11. $A\cdot A\cdot A=A^3=O$.

14. Cumple que $A^4=A$.

15. a) No: $A\cdot B=-B\cdot A$.

16. $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

19. $A=\begin{pmatrix}a & 0\\ c & a\end{pmatrix}$.

20. a) 2. b) 2. c) 2.

21. a) 2 para cualquier valor de *a*. b) 2 si $a = 1$; 3 en los demás casos. c) 2 si $a = \pm1$; 3 en los demás casos.

22. Si *a*, *b* y *c* son iguales, el rango es 1. Si *a*, *b* y *c* no son iguales, el rango es 2.

24. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -1/8\\ 1/4 & 3/8\end{pmatrix}$. c) No es invertible.

25. a) $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$. b) $B^{-1}=\begin{pmatrix}-1/4 & -1/4 & 3/4\\ 1/2 & 1/2 & -1/2\\ 3/4 & -1/4 & -1/4\end{pmatrix}$. c) No tiene inversa.

26. $A=\begin{pmatrix}-12 & 5\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

27. $\lambda = \pm3$.

28. $X=\dfrac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3 & 7\\ 12 & 7 & 5\\ 14 & -2 & 3\end{pmatrix}$; $Y=\dfrac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix}7 & -2 & -1\\ -9 & -1 & 9\\ -2 & -7 & 2\end{pmatrix}$.

29. a) $x = -1$. b) $-1/2$.

30. $X=\begin{pmatrix}1/2 & -7/2\\ 5/2 & 5/2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

31. a) $B\cdot A = C$. $c_{11}=2494000$ €; $c_{22}=5610000$ €; $c_{33}=3902000$ €.
b) $A\cdot B = D$. $d_{11}=7230000$ € ; $d_{22}=4776000$ €, respectivamente.

32. *A*1, *A*3 y *A*2.

33. $A^6=6\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}-5\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 18 & 1\end{pmatrix}$.

34. $X=\begin{pmatrix}59 & -33 & 58\\ -16 & 9 & -16\end{pmatrix}$.